

# Algebraische Grundkompetenzen im Computerzeitalter

Helmut Heugl, Wien

*Der Fortschritt der Menschheit dokumentiert sich in seinen Werkzeugen. Werkzeuge sind zum einen Ergebnis von Erkenntnissen, und zum anderen sind neue Erkenntnisse nicht ohne Werkzeuge möglich.*

*Volker Claus 1990*

*Algebraische Kalkülakrobatik wird abnehmen*

*H.G. Weigand, 1995*

*Wieviele Termumformungen braucht der Mensch?*

*W. Herget, 1995*

*Weniger rechnen – mehr verstehen*

*E. Lehmann, 1995*

## **Motive für die Beschäftigung mit dem Thema:**

- Der computerunterstützte Unterricht bewirkt wesentliche Veränderungen auch bei den unverzichtbaren Grundkompetenzen. Zwei wichtige Beobachtungen bestärken uns in unserer Ansicht: Eine Verschiebung der Aktivitäten vom Ausführen zum Planen und ein deutlich stärker schülerzentrierter, experimenteller Unterricht.
- Die neuen Lehrpläne mit einem wesentlich niedrigeren Verbindlichkeitsgrad haben in Österreich eine längst fällige Diskussion über Standards ausgelöst. Auch die in unserem Land übliche Berechtigungsvergabe wird kritisch hinterfragt. Die TIMS Studie hat dazu auch einen Beitrag geleistet.

Der erste Teil des Vortrages beschäftigt sich mit den Grundkompetenzen, wobei es zum Teil nur zu einer Schwerpunktverschiebung bei traditionellen Grundkompetenzen kommt. Insbesondere bei der Kalkülkompetenz wird zwischen der kurzfristig notwendigen Kompetenz in der jeweiligen Lernphase und der langfristig verfügbaren Kompetenz unterschieden.

Im zweiten Teil wird das Problem angesprochen, dass die traditionellen Formen der Leistungsmessung nicht mehr zum neuen Lernstil des computerunterstützten Unterrichts passen. Es wird über Experimente mit neuen Formen der Leistungsmessung im Rahmen des österreichischen CAS-Projektes berichtet.

Die Fülle der Untersuchungsergebnisse die wir bei Beobachtung von 94 Versuchsklassen mit über 2000 Schülern gemacht haben lassen sich nicht in so einem kurzen Vortrag unterbringen. Einen ausführlicheren Bericht über unsere Forschungstätigkeit findet man auf unserer Homepage: [www.acdca.ac.at](http://www.acdca.ac.at)

# 1. Die Aufgabe der Schule im Zeitalter der Informationstechnologie und die Rolle der Mathematik

## 1.1 Die Rolle der Schule

In der derzeitigen Bildungsdiskussion beobachten wir häufig eine Polarisierung zwischen extremen Positionen. Oft wird dort ein ausschließendes „entweder – oder“ gesetzt, wo eigentlich ein „sowohl –als auch“ gehören würde. Einige Beispiele dazu:

### (1) Bildung $\Leftrightarrow$ Qualifikationen

Vor allem seitens der Wirtschaft wird häufig von der Schule die Vermittlung möglichst direkt verwertbarer beruflicher Qualifikationen gefordert. Auf der anderen Seite hört man, dass man einen großen Teil der Berufe, die man in 10 Jahren brauchen wird, noch gar nicht genau kennt.

#### These 1:

Die Schule von Morgen, mit dem Auftrag SchülerInnen auf lebenslanges Lernen vorzubereiten, muss beides vermitteln: Bildung und Qualifikationen.

Was bedeutet aber „höhere Allgemeinbildung“?

Roland Fischer stellt in einem Artikel zu diesem Thema folgendes fest:

- Wir beobachten ein immer größeres Auseinanderklaffen zwischen Wissen der Allgemeinheit und Expertenwissen.
- Daher bedürfen Gesellschaftliche Diskussions- und Entscheidungsprozesse einer Vermittlung zwischen Spezialexpertisen und allgemeinem Bewusstseinsstand

Menschen mit höherer Allgemeinbildung sollten sich mit Experten verständigen können, gleichzeitig diese hinsichtlich der Relevanz ihrer Expertise (nicht hinsichtlich der innerfachlichen Korrektheit) beurteilen können, und zwar aus der Position der Allgemeinheit, und damit Spezialexpertisen für Entscheidungen synthetisieren können.

In diesem Sinne bedeutet höhere Allgemeinbildung

### **Kommunikationsfähigkeit mit Experten und mit der Allgemeinheit**

Diese Kommunikationsfähigkeit erfordert, 3 Arten von Sprachen zu erlernen:

- die Muttersprache,
- Fremdsprachen sowie
- die Sprache der Mathematik

Das Erlernen der Sprache der Mathematik kann also in diesem Sinne nicht nur jener Gruppe vorbehalten bleiben, die das Fach Mathematik für ein Studium an der Universität benötigt, diese Sprache brauchen alle, die eine höhere Allgemeinbildung anstreben.

## **(2) Fertigkeiten $\Leftrightarrow$ Kompetenzen**

Im Lexikon findet man unter dem Begriff „Kompetenz“ einerseits „Zuständigkeit, Befugnis“, andererseits „Urteilsfähigkeit“. Kompetenz haben heißt also, nicht nur Fertigkeiten, Fähigkeiten und Wissen zu haben, sondern dieses auch vernetzen zu können. Es genügt nicht das „WIE“ zu beherrschen, man muss auch wissen „WARUM“ etwas so ist oder so funktioniert.

### **These 2:**

Gerade weil wir an das neue Werkzeug Computer manche Fertigkeiten abgeben können, sollten in der Schule von Morgen nicht nur Fertigkeiten, sondern vermehrt Kompetenzen erworben werden

## **(3) kurzfristige Kompetenz $\Leftrightarrow$ langfristige Kompetenz**

In der Regel messen wir bei den klassischen Schularbeiten (in Deutschland: Klassenarbeiten) nur kurzfristig verfügbare Fertigkeiten oder Kompetenzen, die knapp vor der Schularbeit erworben wurden. Ausserdem sind unsere Schüler nur gewohnt vom eigenen Lehrer genauso gefragt zu werden, wie es eben vor kurzem geübt wurde. Dies ist für mich auch eine Erklärung für das schlechte Abschneiden bei der TIMS-Studie, weil unsere Schüler nicht gewohnt sind von anderen anders gefragt zu werden und schon gar nicht langfristig verfügbare Kompetenzen.

Für die Messung der Qualität unseres Bildungssystems wären aber langfristig verfügbare Kompetenzen ein viel wichtigerer Indikator. Allerdings müsste man dann, was die Tiefe und Intensität des überprüften Wissens anlangt, natürlich Abstriche machen

### **These 3:**

Die kurzfristige Kompetenz, welche unmittelbar im Rahmen eines bestimmten Lernprozesses notwendig ist, muss wesentlich detaillierter und intensiver sein als die später für eine Problemlösung abrufbare langfristige Kompetenz.

## **1.2 Die Rolle der Mathematik**

Im Zeitalter der Informations- und Kommunikationstechnologie ist die Sprache der Mathematik für die Kommunikation mit Experten und mit der Allgemeinheit unverzichtbar. Computer und Computersoftware haben dies Sprache aber gewaltig verändert. Dies zeigt sich auch in unseren Untersuchungen zum computerunterstützten Unterricht. Kurz ein paar wichtige Ergebnisse:

- Der Unterricht wird schülerzentrierter und experimnteller
- Es kommt zu einer Verschiebung der Tätigkeit vom Ausführen zum Planen
- Wir beobachten eine Schwerpunktsverschiebung vom Operieren hin zum Modellbilden und Interpretieren
- Der Unterricht wird anwendungsorientierter
- Das Werkzeug unterstützt nicht nur Kognition, es wird zu einem Teil der Kognition

Nicht nur im Mathematikunterricht sind wir heute mit einem neuen Lernbegriff konfrontiert, die Vermittlung von Fachwissen allein ist zuwenig.

Die Beobachtung des Lernens in unseren CAS-Klassen (CAS steht für "Computer Algebra Systeme") führt uns zur Formulierung folgender These:

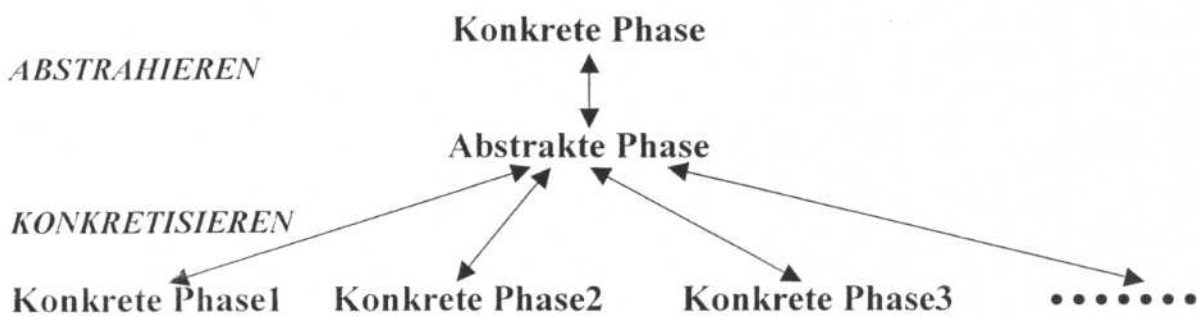
**These 4:**

Computerunterstützter Unterricht unterstützt und fördert Kompetenzen weit über die inhaltliche Kompetenz hinaus [Klippert, H., 2000] :

- die Fachkompetenz,
- die Methodenkompetenz,
- die Soziale Kompetenz und
- die Persönlichkeitskompetenz

werden zum expliziten Lerninhalt des Mathematikunterrichts.

**3-Phasenmodell der Mathematik:**



Eine besondere Stärke der Mathematik besteht darin, dass man sich bei oder in Folge der Bearbeitung eines Problems durch Abstrahieren vom jeweiligen Problem löst, in dieser abstrakten Phase Begriffe und Algorithmen entwickelt, Sätze formuliert und beweist usw. Aber gerade dieses Abstrahieren ermöglicht dann in der nächsten Phase des Konkretisierens die Behandlung und Lösung einer Fülle von neuen konkreten Anwendungen. Ein typisches Beispiel ist die Entwicklung und Nutzung des Integralbegriffs .

Vor dem Hintergrund dieses Modells sollte man auch auf eine Gefahr hinweisen, die bei Nutzung solch mächtiger Werkzeuge droht:

**These 5:**

Mathematik bedeutet nicht nur Mathematisieren

Man kann Mathematikunterricht beobachten, wo Schüler versuchen, für interessante Anwendungsprobleme durch Experimentieren Modelle mit Hilfe des CAS zu finden, die Lösung dem Werkzeug überlassen und bestenfalls die gefundene Lösung noch interpretieren. Dann wendet man sich dem nächsten Problem zu usw. Was fehlt ist das Kernstück der Mathematik, die abstrakte Phase. Es werden weder Begriffe und Algorithmen entwickelt, es werden keine Algorithmen angewendet und geübt, mit anderen Worten es fehlt die „White Box Phase“ des Mathematiklernens [Heugl u.a. 1996]. Mathematiktreiben besteht nur in einem blinden Nutzen des Werkzeugs als „Black Box“. Um zum Begriff Mathematik als Sprache zurückzukehren: Man nutzt eine Sprache, die man nicht versteht.

Gerade deshalb ist es notwendig, neue didaktische Konzepte als Konstruktionsanleitungen für computerunterstützten Unterricht anzubieten, damit aus dem faszinierenden Werkzeug nicht eine gefährliche Waffe wird.

## 2. Die algebraische Grundkompetenz im CAS-Zeitalter

Wie schon eingangs bei den Motiven erwähnt ergibt sich die Frage nach den Grundkompetenzen aus verschiedenen Gründen:

- Die international geführte Standarddiskussion mit dem Ziel die Vergleichbarkeit der Bildungsabschlüsse zu erreichen erfordert eine Definition von unverzichtbarer Grundbildung und damit auch eine Festlegung mathematischer Grundkompetenzen.
- Die neuen österreichischen Lehrpläne mit Kern- und Erweiterungsbereich führen zu einer Diskussion über unverzichtbare Kerne
- Die Verschiebung der Bedeutung von mathematischen Kompetenzen durch die neuen Werkzeuge führen zur Frage: Welche Kompetenzen sind nach wie vor unverzichtbar, welche neuen Kompetenzen sind unbedingt notwendig?
- Um sich der zentralen Aufgabe der Mathematik, dem Problemlösen widmen zu können, braucht man als Rüstzeug verschiedene Grundkompetenzen.
- Da Leistungsmessung letztlich Kompetenzmessung ist, muss zuerst festgelegt werden, was wie gemessen wird.

Spricht man von algebraischer Kompetenz, meint man häufig nur eine Fertigkeit, nämlich Rechenfertigkeit. Gerade diese „Handrechenfertigkeit“ hat aber natürlich sehr an Bedeutung verloren. Als Wilfried Herget, Eberhard Lehmann, Bernhard Kutzler und ich einen Artikel zur Frage „Welche handwerklichen Rechenfertigkeiten sind unverzichtbar?“ veröffentlicht haben [Herget u.a., 1999], wurden wir wegen unseres angeblich so niedrigen Anspruchsniveaus auch angefeindet. Die Kritiker haben einiges nicht beachtet: Wir haben von langfristigen Kompetenzen gesprochen, welche Schüler haben sollen, wenn sie jederzeit ein CAS zur Verfügung haben, und nicht von kurzfristigen Kompetenzen in der „White Box Phase“ des Algebralernens und wir haben betont, dass an Stelle der nicht mehr so zentralen Handrechenfertigkeit wichtigere andere Kompetenzen treten. Mit anderen Worten: Der Mathematikunterricht wird durch das Werkzeug anspruchsvoller und auch schwieriger.

Ohne Anspruch auf Vollständigkeit habe ich einige Grundkompetenzen aufgelistet, die sich bei Beobachtung der Schüler in CAS-Klassenn als wichtig ergeben haben. Es zeigt sich, dass die meisten nicht neu sind. Verschoben hat sich nur ihre Bedeutung und der Zugang bei Nutzen des Werkzeugs Computer:

- Die Termfindungskompetenz (globaler: die Modellfindungskompetenz)
- Die Strukturerkennungskompetenz (die Äquivalenzerkennungskompetenz)
- Die Testkompetenz
- Die Kalkülkompetenz (die Handkalkülkompetenz)
- Die Visualisierungskompetenz
- Die modulare Kompetenz
- Die Werkzeugkompetenz

## **2.1 Die Termfindungskompetenz (globaler: die Modellfindungskompetenz)**

Von den drei Phasen des Problemlöseprozesses, dem Modellieren, dem Operieren und dem Interpretieren ist das Operieren nach wie vor dominierend. Durch das Werkzeug Computer ändert sich diese Vormachtstellung - das Finden eines geeigneten Modells wird wichtiger.

Oft ist es nur ein Gedächtnistraining, man muss sich an eine gelernte Formel erinnern. Man braucht aber bei der Entscheidung für das richtige Modell auch Kenntnisse des dazu passenden mathematischen Gebietes, etwa der Geometrie oder der Stochastik.

Häufig besteht der Modellierungsprozess in einer Übersetzungstätigkeit von der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik

Der Übersetzungsprozess erfolgt häufig in zwei Schritten

**Schritt 1:** Komprimieren des Textes, Übersetzen in eine Wortformel

**Schritt 2:** Übersetzen der Wortformel in eine abstrakte mathematische Formel

### **Der Einfluss von CAS auf diese Kompetenz:**

- Direktere Übersetzungsmöglichkeit in die Sprache der Mathematik, da das Werkzeug neue und leichter verfügbare Sprachkonstrukte zur Verfügung stellt
- Größere Auswahl an Prototypen: Neben algebraischen Termen stehen andere Prototypen, wie etwa Graphen oder Tabellen und auch rekursive Modelle zur Verfügung
- Mehr und einfachere Testmöglichkeit. Der Schüler kann mit seinem eigenen Experten, dem CAS, auch ohne Hilfe des Lehrers, die Brauchbarkeit seines Modells testen.

## **2.2 Die Strukturerkennungskompetenz (die Äquivalenzerkennungskompetenz)**

Auch die Notwendigkeit dieser Kompetenz ist nichts Neues. So hat etwa Günther Malle in seinen Untersuchungen gezeigt, dass ein grosser Teil der Schülerfehler beim algebraischen Operieren auf Strukturerkennungsfehler zurückzuführen ist.

Eine Voraussetzung für diese Kompetenz ist die Kenntnis der algebraischen Gesetze und Regeln. Richtige Strukturentscheidungen können auch bei Nutzung des Werkzeugs CAS nicht allein mit "trial and error" getroffen werden

Gerade jetzt, wo das Werkzeug die Ausführung der Operation übernimmt, bekommt die Strukturerkennung eine neue Bedeutung.

Strukturerkennung ist nötig

- bei der Eingabe eines Ausdrucks: Insbesondere bei linearen Eingabezeilen ist zuerst einmal eine Strukturerkennung für das richtige Setzen der Klammern nötig.
- bei der Auswahl der passenden Operation: Diese Entscheidung erfolgt auf der Basis einer Strukturerkennung.

- bei der Überprüfung und Interpretation von Ergebnissen: Der Lernende muss Ergebnisse interpretieren, die er nicht selbst produziert hat. Das angebotene Ergebnis stimmt von der Struktur her oft nicht mit dem erwarteten überein.
- beim Vergleich verschiedener Ergebnisse. Oft ist nicht sofort einsehbar, ob verschiedene Ergebnisse äquivalent oder verschieden sind.

## 2.3 Die Testkompetenz

Seit Mathematik zur Problemlösung benutzt wurde, war es nötig, die Korrektheit der Ergebnisse zu überprüfen, also zu testen.

Eines der wichtigsten Resultate unserer CAS-Projekte lautet: Der Unterricht wird deutlich schülerzentrierter und experimenteller. Neben dem Lehrer gewinnt das CAS als Experte an Bedeutung. Dadurch erhöht sich aber die Notwendigkeit des Testens ganz bedeutend. Auf der anderen Seite stellt das Werkzeug völlig neue Testmöglichkeiten zur Verfügung.

Veränderungen bei der Testkompetenz durch den Einfluss von CAS:

- Testen ist einfacher und schneller möglich.
- Neue Testmöglichkeiten, wie etwa das algebraische oder das graphische Testen
- Testen wird notwendiger, da die Ergebnisse ja nicht selber produziert werden.
- Experimentelles Arbeiten braucht begleitendes Testen. In CAS-Klassen ist kaum mehr der „algorithmische Gehorsam“ zu beobachten, das heisst das einfache Nachvollziehen des Lehrerweges. Man findet Schularbeiten, wo bei 20 SchülerInnen 10 verschiedene Lösungswege auftreten.
- Mehr Anwendungen erfordert neben dem innermathematischen Testen der Korrektheit der Operation auch ein Testen der Brauchbarkeit der Lösung für das praktische Problem.

Diese neue Rolle der Testkompetenz erfordert das Einüben von Teststrategien, so wie man im traditionellen Unterricht Rechenfertigkeiten geübt hat. Es ist oft faszinierend zu beobachten, wie erfindungsreich SchülerInnen beim Entwickeln von Teststrategien sind.

Beispiele für Teststrategien bei der Untersuchung der Äquivalenz von Termen:

- Nutzen der algebraischen Möglichkeiten des Werkzeugs CAS (z.B.: expandieren oder faktorisieren)
- Gleichsetzen der Terme
- Bilden der Differenz
- Bilden des Quotienten
- Graphische Methoden

## 2.4 Die Kalkülkompetenz (die Handkalkülkompetenz)

Da man mit Kalkülkompetenz häufig nur Handrechenfertigkeit meint, ist zuerst eine Begriffsklärung nötig. Die Definition von Horst Hischer [Hischer H., 1995] ist eine brauchbare Grundlage für oft heftig geführte Diskussion über die Bedeutung dieser Kompetenz im CAS-Zeitalter:

*Kalkülkompetenz (anstelle von Rechenfertigkeit) ist die Fähigkeit eines Individuums, einen gegebenen Kalkül in konkreten Situationen zielgerichtet anwenden zu können.*

Richard Skemp unterscheidet zwischen zwei Qualitäten von Kompetenzen [Skemp, R., 1976]:

### **Instrumental Understanding:**

Die Nutzung von mathematischen Regeln ohne notwendigerweise zu wissen, warum die Regel gilt.

### **Relational Understanding:**

Die Fähigkeit, Regeln herzuleiten, zu begründen und anzuwenden. Regeln als Teil eines Netzwerks von Begriffen und Beziehungen zwischen Begriffen zu verstehen. Wissen, WIE es geht und WARUM

Man könnte natürlich auch wie in Kapitel 1 unterscheiden zwischen Fertigkeiten („Sag mir nur wie’s geht“) und Kompetenzen.

Da ja immer wieder argumentiert wird, man müsse Rechenfertigkeit intensiv üben, um auch zu mehr Verständnis zu kommen, haben wir uns in einer Untersuchung verschiedene Fragen gestellt und Hypothesen formuliert [Klinger W. u.a., 1998]. In der folgenden Tabelle finden sich auch die Antworten, die wir gefunden haben:

Hypothesen und Fragen	Antworten und Schlussfolgerungen
<u>Frage 1:</u> Ist Instrumental Understanding eine Voraussetzung oder eine Unterstützung für eine höhere Ebene von Relational Understanding?	Nicht unbedingt. CAS-Schüler haben oft eine relativ hohe Begründungskompetenz ohne ausreichender händischer Rechenkompetenz
<u>Frage 2:</u> Unterstützt Relational Understanding die notwendigen Fertigkeiten von Instrumental Understanding?	Nicht unbedingt Relational Understanding garantiert keine ausreichende Handkalkülkompetenz
<u>Hypothese 1:</u> CAS-Schüler haben eine geringere Handkalkülfertigkeit, aber sind dafür besser beim Begründen und Interpretieren	Die Untersuchungen bestätigen die Hypothese. Experimentelles, schülerzentriertes Lernen fördert die Kompetenz, mathematische Aktivitäten zu beschreiben und zu begründen
<u>Hypothese 2:</u> Die Nutzung des CAS als Rechen- und Testwerkzeug führt zu besseren Resultaten und unterstützt die Begründungskompetenz	Die Untersuchungen bestätigen die Hypothese. Fehler, die beim händischen Rechnen aufgetreten sind, konnten beim Testen mit dem CAS selbständig korrigiert werden und die Fehlerursache konnte lokalisiert werden



### **Der Einfluss von CAS auf die Kalkülkompetenz:**

- Schwerpunktsverschiebung vom Operieren zum Modellieren und Interpretieren
- Schwerpunktsverschiebung vom Ausführen zum Planen der Operation
- Schwerpunktsverschiebung von der Handkalkülkompetenz zu den anderen algebraischen Kompetenzen
- Geringere Komplexität beim händischen Rechnen, insbesondere was die langfristige Kalkülkompetenz betrifft
- Notwendigkeit der Werkzeugkompetenz
- Mehr Praxisnähe bei Anwendungsproblemen
- In der Theoriephase mehr Konzentration auf das jeweilige mathematische Problem, da Rechenarbeit abgegeben wird
- Eine bessere Verknüpfung des formalen und inhaltlichen Aspekts der Mathematik

## **2.5 Die Visualisierungskompetenz**

Eine besondere Qualität der Mathematik ist die Möglichkeit der graphischen Repräsentation abstrakter Objekte. In diesem Sinn ist Visualisierung natürlich auch im traditionellen Unterricht von großer Wichtigkeit, nur ist es wesentlich schwieriger, den graphischen Prototypen einer Funktion oder eines Begriffes zu erhalten. Die gute alte „Kurvendiskussion“ verdankt diesem Umstand ihre Berechtigung.

Im Zeitalter der Kommunikationstechnologie muss sich die Mathematik einer weiteren Aufgabe vermehrt stellen: Wir sind ständig konfrontiert mit einer Fülle graphischer Darstellungen von Abhängigkeiten zwischen Größen in den Printmedien, im Fernsehen und im Internet. Sie kompetent und verantwortungsbewusst zu interpretieren und zu nutzen ist ein wichtiges Lernziel der Mathematik.

### **Der Einfluss von CAS auf die Visualisierungskompetenz:**

- CAS ermöglicht dem Lerner Graphen viel einfacher und schneller zu erhalten
- Verschiedene Prototypen eines Objektes, einer Funktion stehen jetzt parallel zur Verfügung: Hat man zum Beispiel den Term, so erhält man unmittelbar auch den Graphen.
- Die Nutzung neuer Prototypen, die einer Visualisierung leicht zugänglich sind, wird durch das neue Werkzeug ermöglicht, wie zum Beispiel rekursive Modelle oder Datenmaterial, das im Data/Matrix Editor (allgemeiner durch Bearbeiten mittels Tabellenkalkulation) bearbeitet werden kann.
- Der Lernprozess verläuft häufig in Form des Hin- und Herpendelns zwischen verschiedenen Prototypen. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von der Window Shuttle Methode [Heugl u.a., 1996]. So kann etwa die Auswirkung von Parametern auf das Modell oder auf die Lösung sehr direkt und wirkungsvoll untersucht werden.
- Algebraische Probleme können nun relativ einfach graphisch gelöst werden.

## 2.6 Die modulare Kompetenz

*Module sind komplexe Wissensseinheiten*

- *in denen Wissen komprimiert wird, und*
- *in denen Operationen durch diese Kapselung als Ganzes abrufbar und einsetzbar werden [Dörfler w., 1991]*

Auch das Nutzen von Modulen ist nicht neu, jede Formel aus der Formelsammlung ist letztlich ein Modul. Das modulare Denken und Arbeiten hat durch das Werkzeug allerdings eine neue Qualität bekommen. Man kann 3 Arten von Modulen unterscheiden:

- ≡ Module, welche das CAS zur Verfügung stellt
- ≡ Module, welche der Lehrer anbietet
- ≡ Module, welche die Schüler selbst anfertigen.

### **Der Einfluss von CAS auf die modulare Kompetenz:**

- Das Werkzeug bietet eine Fülle neuer Module an und ermöglicht die Konstruktion von Modulen.
- Das Nutzen von Modulen bedeutet das Erfinden und Verwenden neuer Sprachkonstrukte der Sprache der Mathematik: komplexe Ausdrücke werden durch ihre Namen ersetzt (Beispiel: Beim Lösen von Gleichungssystemen arbeiten die Schüler nicht mehr in den Gleichungen, sondern mit den Namen der Gleichungen).
- Operationen oder Gruppen von Operationen werden als Funktionen oder Programme gespeichert. Das Nutzen solcher „Programmmodule“ führt zu einem strukturierteren Problemlösen und zu einer neuen Qualität der Sprache der Mathematik.
- Gerade beim modularen Arbeiten bestätigt sich die These von W. Dörfler, dass das Werkzeug CAS nicht nur Kognition unterstützt sondern zu einem Teil der Kognition wird [Dörfler, 1990].

## 2.7 Die Werkzeugkompetenz

*„Neben den mathematischen Inhalten brauche ich nun auch Fertigkeiten, um den Computer nutzen zu können“*

Diese Aussage eines Schülers einer CAS-Klasse zeigt, dass er die Werkzeugkompetenz für nötig hält, aber als keine mathematische Tätigkeit sieht.

Diese Grundkompetenz ist kommt neu dazu und darf in ihrer Bedeutung nicht unterschätzt werden. Sie ist sehr wohl eine mathematische Grundkompetenz, ist doch das Aktivieren von Befehlen eine mathematische Entscheidung

### **Der Einfluss von CAS auf die Werkzeugkompetenz**

- Notwendige Werkzeugfertigkeiten müssen genauso geübt und automatisiert werden wie Rechenfertigkeiten.
- Wachsende Freude und Interesse an Mathematik im CAS-unterstützten Unterricht korreliert mit der Werkzeugkompetenz
- Wir beobachten einen unterschiedliche Zugang zu dieser Kompetenz und damit eine unterschiedliche Akzeptanz bei Burschen und Mädchen

- Die notwendigen Befehle und Operationen müssen den Lernenden in kleinen Portionen offeriert werden.
- Vereinbaren von Regeln für die Dokumentation des Lösungsweges notwendig

### 3. Leistungsmessung und Leistungsbewertung im CAS-unterstützten Unterricht

Dieses Thema war im vergangenen ACDC-A-Projekt zentrales Untersuchungsziel. Wie bei vielen anderen Bereichen hat uns der Computer veranlasst, über Dinge nachzudenken, über die wir schon längst hätten nachdenken sollen. Auch der neue Lehrplan der Sekundarstufe I erfordert eigentlich ähnliche Überlegungen zur Leistungsmessung wie wir sie in CAS-Klassen angestellt haben.

Zu den schon angesprochenen wichtigsten Veränderungen – mehr Schülerzentriertheit, mehr experimentelles Arbeiten, mehr kooperative Lernformen usw. – passen die klassischen Prüfungsformen nicht mehr. Das betrifft insbesondere die überbewertete Schularbeit, bei der vor allem Fertigkeiten, wie etwa Rechenfertigkeiten, überprüft werden.

Hauptziel dieser Untersuchung ist also, die Leistungsmessung und –bewertung der geänderten Lernsituation im computerunterstützten Mathematikunterricht anzupassen.

Viele der Untersuchungsziele sind nicht nur computerspezifisch, daher sollte überlegt werden, ob diese Untersuchungen in Zukunft nicht auch auf Klassen ausgedehnt werden, in denen traditionell, d.h. ohne Nutzung des Computers, Mathematik unterrichtet wird.

Ideen zum Untersuchungsdesign gab es viele. Im folgenden werden nur Leistungsmessungsformen beschrieben, die in Absprache mit Schülern und Eltern auch erprobt wurden. Kurz zusammengefasst folgen dann einige Ergebnisse. Einen ausführlichen Bericht über das Projekt findet man auf unserer Homepage.

#### 1.1 Untersuchungsbereiche, Untersuchungsdesign

Bereich	Aktivitäten, Untersuchungsbereiche
<b>Bereich 1:</b> „Stetige Fortsetzung“ der klassischen Schularbeit mit CAS	Sammeln, Entwickeln von Aufgaben. Untersuchen der Veränderung des Schülerverhaltens. Frage der Dokumentation des Lösungsweges. Veränderung im Notenbild.
<b>Bereich 2:</b> <b>Problemlösearbeiten</b> mit Verwendung von Lernmedien: Stufe 1: Gemeinsam bzw. von den Lernenden entwickeltes Repetitorium. Stufe 2: Nach Vereinbarung mit dem Lehrer: Nur Heft oder nur Buch. Stufe 3: Beliebige von Schülern ausgewählte Medien.	Vorbereitung auf die Problemlösearbeit: Anleitungen zum Entwickeln des eigenen Lernmediums. Anleitung zum Nutzen von Medien beim Problemlösen. Bewusstmachen von heuristischen Strategien zum Problemlösen. Entwickeln von passenden Aufgaben und Beurteilungskriterien. Testen in der Versuchsklasse. Evaluation: Notenstatistiken. Lehrer-, Schülereindrücke. Informelle Tests gemeinsam mit Vergleichsgruppen.

<p><b>Bereich 3:</b>  <b>„Jahresprüfungszeit“:</b>                  z.B. 250 Minuten Zeit für schriftliche Prüfungen pro Jahr können folgendermaßen genutzt werden:                  Kurze Überprüfungen von reproduktiven Fertigkeiten oder von reproduktivem Wissen (eventuell auch ohne CAS). Dauer z.B. 20 Minuten.                  Beispiel: Rechenfertigkeiten beim Bruchrechnen.</p> <p>Längere schriftliche Arbeiten als Problemlösearbeiten, wo die Schüler auch Zeit zum Experimentieren haben und eventuell auch Lernmedien verwenden dürfen.                  Dauer z.B. 2 Unterrichtsstunden.                  Natürlich müssen die Noten gewichtet werden.</p> <p>Eine Variante ist auch , weniger schriftliche Prüfungen vorzusehen und dafür den übrigen Leistungen mehr Gewicht zu geben.</p>	<p>Vorbereiten der Schüler auf diese Prüfungssituation durch informelle Tests und durch Lernphasen, wo in Einzelarbeit diese Situation geprobt werden kann.                  Bewusstmachen heuristischer Strategien (z.B. Teststrategien).                  Entwickeln von passenden Aufgaben und Beurteilungskriterien.                  Testen in der Versuchsklasse.</p> <p>Evaluation:                  Lehrer-, Schülereindrücke. Informelle Tests gemeinsam mit Vergleichsgruppen                  Notenstatistiken</p>
<p><b>Bereich 4:</b>  <b>„Facharbeiten“</b>                  Ein Teil der klassischen Schularbeiten wird durch „Facharbeiten“ ersetzt, welche die Schüler zum Teil im Unterricht, größtenteils aber zu Hause bearbeiten.                  Themen werden meist an einzelne Schüler, bei großen Klassen auch an Paare vergeben.                  Inhaltlich handelt es sich um mathematische Beispiele oder Themen, bei denen das bisher Gelernte angewendet werden muß, oder um kleine neue Bereiche, die selbständig erarbeitet werden müssen.                  Die Überprüfung des Lernfortschritts erfolgt durch die Dokumentation und Präsentation der Ergebnisse z.B. in Form von Referaten. Dabei wird auch durch direkte Befragung der Lernzuwachs gemessen. Ein Ergebnis sind auch Lernunterlagen für die anderen Schüler.</p> <p>Idee: Auflösung der Trennung zwischen schriftlicher und mündlicher Prüfung. Auflösung der Trennung zwischen produktorientierter Schularbeit und eher prozessorientierter „Beobachtung der Mitarbeit“.</p> <p>Die noch immer notwendigen Fertigkeiten und ein gewisses Faktenwissen wird in kürzeren Tests überprüft (siehe Bereich 3).</p>	<p>Vorbereiten der Schüler auf diese Prüfungssituation durch Lernphasen, wo in Einzel- oder Partnerarbeit diese Situation geprobt werden kann.                  Bewusstmachen heuristischer Strategien.                  Entwickeln von passenden Aufgaben und Beurteilungskriterien.                  Testen in der Versuchsklasse.</p> <p>Evaluation:                  Lehrer-, Schülereindrücke. Informelle Tests gemeinsam mit Vergleichsgruppen.                  Notenstatistiken.</p>
<p><b>Bereich 5:</b>                  Ein Teil der schriftlichen Arbeiten wird durch eine <b>Projektarbeit</b> ersetzt. Bearbeitung des Projektthemas durch Gruppen <math>\Rightarrow</math> Leistungsmessung bei kooperativen Lernformen.                  Gemessen wird schon während des Prozesses sowie die Dokumentation und Präsentation des Ergebnisses, aber auch die Einzelkompetenz bei Gruppen- oder Partnerarbeit durch direkte Befragung oder Tests.</p>	<p>Vorbereiten der Schüler auf diese Prüfungssituation durch entsprechende Lernphasen, wo diese Situation geprobt werden kann.                  Bewusstmachen heuristischer Strategien.                  Suchen von Projektthemen, Entwickeln von passenden Aufgaben und Beurteilungskriterien.                  Testen in der Versuchsklasse.</p> <p>Evaluation:                  Lehrer-, Schülereindrücke. Informelle Tests gemeinsam mit Vergleichsgruppen.</p>
<p><b>Bereich 6:</b>  <b>Fächerübergreifende schriftliche Arbeit.</b>                  Geplant sind Arbeiten, die sowohl für Mathematik als auch für Physik gewertet werden. Im gegenständlichen Fall unterrichtet die Lehrerin in dieser Klasse sowohl Mathematik als auch Physik.</p>	<p>Nach der entsprechenden Vorbereitung im Unterricht sollen die Prüfungsfragen dieser schriftlichen Arbeiten so konzipiert sein, dass damit Ziele beider Fächer abgeprüft werden.                  Evaluation:</p>

<p>Idee: Der Bildungsauftrag „Schulung des vernetzten Denkens“ und die daraus resultierende fächerübergreifende Matura machen solche Prüfungsarten schon längst notwendig. Das Werkzeug CAS bietet dazu völlig neue Möglichkeiten.</p>	<p>Notenstatistik dieser Arbeit getrennt in Ph und M. Lehrer- und Schülereindrücke Einfluss auf die Jahresnoten.</p>
<p><b>Bereich 7:</b>  <b>„Gruppenschularbeit“</b>                  Die im computerunterstützten MU beobachteten Sozial- und Interaktionsformen erfordern eine Berücksichtigung in der Prüfungssituation. Entscheidend für die Validität dieser Leistungsmessung ist, ob es gelingt, <u>nicht nur die Gruppenkompetenz, sondern auch die Einzelkompetenz zu messen.</u></p>	<p>Die Details betreffend den Ablauf einer solchen Prüfung werden von den Projektlehrern erst ausgearbeitet.                  Evaluation:                  Notenstatistiken Schularbeits- und Jahresnoten                  Schüler- und Lehrereindrücke                  Eventuell zusätzliche Tests zur Messung der Einzelkompetenz</p>

### 3.2 Änderungen bei Zielen und Inhalten des Mathematikunterrichts

- Die Trennung in Kurzüberprüfungen von Grundfertigkeiten und längeren Problemlösearbeiten macht bei den Schülerinnen und Schülern die Notwendigkeit des Erlernens von Grundkompetenzen als Voraussetzung für das Problemlösen bewußter.
- Die Überprüfung von Grundkompetenzen beschränkt sich nicht nur auf Rechenkompetenz. Geprüft werden auch Formelkenntnisse, Visualisierungskompetenz, Kompetenzen der Rechnernutzung, aber auch Begründungskompetenzen, sowie grundlegende Anwendungskompetenzen.
- Die Problemlösearbeiten fördern und ermöglichen dank der Rechnernutzung und der Nutzung von Lernmedien eine verstärkte Anwendungsorientierung und eröffnen neue Möglichkeiten zur Überprüfung von fächerübergreifendem Lernen.
- Bei Problemlösearbeiten, aber noch mehr bei Fach- und Projektarbeiten werden nicht nur mathematische Inhalte, sondern auch heuristische Strategien überprüft. Argumentieren und Begründen werden selbstverständliche Ziele bei den Fach- und Projektarbeiten.
- Die besonders bei Fach- und Projektarbeiten möglich innere Differenzierung erlaubt eine individuellere Anpassung der geforderten Lernziele an das Leistungsniveau der einzelnen Schülerinnen und Schüler. Probleme ergeben sich daraus bei der Leistungsbewertung.
- Neben der mathematischen Fachkompetenz, gewinnen die Methodenkompetenz, aber auch die Sozialkompetenz und die Persönlichkeitskompetenz als fundamentaler Bildungsauftrag des Faches Mathematik an Bedeutung.
- Offen und ein wichtiges Thema zukünftiger Projekte ist noch die Frage der Messung und Bewertung solcher Kompetenzen. Ansätze dazu findet man bei der Leistungsmessung von Facharbeiten [AC'DCA, 2001]
- Die neuen Überprüfungsformen zwingen die Lehrer zu einer deutlicheren Schwerpunktsetzung bei der Planung der Ziele und Inhalte. Grund dafür ist einerseits der große Zeitaufwand für Fach- und Projektarbeiten, aber auch die sich nun ergebende Möglichkeit der stärkeren Individualisierung und Differenzierung. Dadurch können Schülerinteressen und aktuelle Anlässe besser berücksichtigt werden und

fächerübergreifende Themen können leichter behandelt werden. Selbstverständlich erfordert eine deutliche Schwerpunktsetzung auch eine „Leichtpunktsetzung“ auf anderen Gebieten. Daraus ergeben sich zweierlei Gefahren, die bei der Planung beachtet werden müssen: Schafft man die notwendige Leichtpunktsetzung nicht, droht eine Überforderung der Schüler, werden die Leichtpunkte „zu leicht“ gesetzt, können wesentliche Ziele und Inhalte unberücksichtigt bleiben. Daraus ergibt sich wieder die Notwendigkeit der Definition der unverzichtbaren Grundkompetenzen.

- Man beobachtet deutlich mehr praxisnahe Anwendungen auch bei den Prüfungen.
- Die Visualisierungsmöglichkeiten, das Nutzen von Tabellen oder auch das Nutzen von vorübergehenden Black Box-Modulen erlaubt eine Vorwegnahme von mathematischen Inhalten aus aktuellem Anlass. So können zum Beispiel Optimierungsaufgaben mit Hilfe des Graphen oder der Tabelle auch schon in der 9. Schulstufe ohne Differentialrechnung gelöst werden. Dementsprechend gehört die Visualisierungskompetenz zu einer besonders wichtigen Grundkompetenz, was sich auch in den Prüfungsaufgaben der Kurzttests widerspiegelt.
- Man beobachtet eine deutliche Zunahme von Aufgaben, die nicht durch Rechnung, sondern durch Visualisierung gelöst werden.
- Völlig neue Aspekte ergeben sich aus der Möglichkeit der effizienteren Nutzung und Behandlung von Daten, etwa im Data/Matrix Editor. Daten können bearbeitet und visualisiert werden, statistische Eckdaten können berechnet werden, Regressionskurven können einfach genutzt werden. Auf diesem Gebiet findet man ganz neue Arten von Prüfungsaufgaben, bei denen der Schwerpunkt auf der Überprüfung des Modellbildens und Interpretierens liegt.
- Der Zugriff auf verschiedene Prototypen von Funktionen eröffnet neue Inhalte. Besonders häufig findet man die Verwendung rekursiver Modelle bei Prüfungsaufgaben.
- Die Überprüfung von Rechenfertigkeiten verliert an Bedeutung, wie zum Beispiel die Überprüfung spezieller Integrationstechniken.
- Die CAS-Nutzung erleichtert und fördert die Vernetzung verschiedener Inhalte sowohl innermathematisch als auch die Vernetzung mit anderen Fächern. Mathematik erhält eine neue Rolle als Basiswissenspool und Strukturerkennungsebene für andere Fächer.
- Bei Problemlösearbeiten, sowie Fach- und Projektarbeiten finden sich überwiegend Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler den gesamten Problemlöseprozess durchlaufen müssen, also Modellbilden, Operieren und Interpretieren.
- Häufiger findet sich auch in der Prüfungssituation die Notwendigkeit der Übersetzungskompetenz von der Umgangssprache, von unstrukturierten Informationen in die Sprache der Mathematik. Förderlich ist dabei auch die Möglichkeit zu experimentieren und Vermutungen zu testen.
- Die auf diese Arten der Leistungsmessung vorbereitenden Arbeitsformen aber auch die Leistungsmessung selbst fördern und erfordern Kreativität und Eigenständigkeit.

## Schlusswort:

Wie schon eingangs ausgeführt, ist die Diskussion über unverzichtbare Grundkompetenzen und Leistungsbeurteilung unabhängig von der Nutzung des Werkzeug Computer unbedingt notwendig. Das neue Werkzeug hat uns nur noch mehr zur Behandlung dieser Fragen gezwungen und es erfordert eine neue Sichtweise, weil sich das Bild der Mathematik wie so oft in der Geschichte durch das Werkzeug verändert hat. Ich hoffe mit dieser Arbeit einen kleinen Beitrag zu dieser Diskussion geleistet zu haben.

## 4. Literatur

ACDCA (Austrian Center for Didactics of Computer Algebra)

Bericht über das Projekt CAS III – 1999/2000: [www.acdca.ac.at](http://www.acdca.ac.at)

Böhm, J. [1999]:

Bruchrechnen ("Calculating fractions") In: Script for teacher training in T-cubed courses

Buchberger, B. [1992]:

Teaching Math by Software. Paper of the RISC Institute ) Research Institute for Symbolic Computation); University of Linz, 1992

Herget, W. [1995]:

Save the idea – save the recipes! In: Rechenfertigkeit und Begriffsbildung; Tagungsband der 13. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematik und Informatik" der GDM in Wolfenbüttel; Sept. 1995, p 156.

Dörfler, W. [1990]

Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium.  
In: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 21. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1991, ISBN 3-209-01452-3

Herget, W., Heugl, H., Kutzler, B., Lehmann, E. [2000]:

Indispensable Manual Calculation Skills in a CAS Environment  
<http://www.kutzler.com>, 1999

Heugl, H., Klinger, W., Lechner, J. [2001]:

Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen.  
Addison-Wesley Publishing Company, Bonn 1996. ISBN 3-8273-1082-2

Hischer, H. [1995]:

Begriffs-Bilden und Kalkulieren vor dem Hintergrund von CAS.  
In: Rechenfertigkeit und Begriffsbildung; Tagungsband der 13. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematik und Informatik" der GDM in Wolfenbüttel; Sept. 1995, p 8.

Klinger, W., Hochfelsner C. [1998]:

Investigation of the impact of the TI-92 on manual calculating skills and on the competence of reasoning and interpreting. In: Final report of the Austrian CAS

Project II, the Ti-92 Project. ACDCA (Austrian Center for Didactics of Computer Algebra) CD-Rom, or ACDCA Home page: <http://www.acdca.ac.at>.

Klippert, H. [2000]:

Methodentraining. Beltz Praxis, S30ff. Beltz Verlag Weinheim und Basel, 2000. ISBN: 3-407-62409-3

Skemp, R. [1976]:

Relational Understanding and Instrumental Understanding. In: Mathematics Teaching , 77 (1976), 16-20.

Weigand, H.G. [1995]:

Neue Werkzeuge und Kalkülkompetenz. In: Rechenfertigkeit und Begriffsbildung; Tagungsband der 13. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematik und Informatik" der GDM in Wolfenbüttel; Sept. 1995 p 38.

ZSE (Zentrum für Schulentwicklung), Günther Grogger und Erich Svecnik [2001]:

Alternative Modelle der Leistungsbeurteilung im Rahmen des Einsatzes von CAS im Mathematikunterricht. ZSE-Report Nr. 52, 2001, ISBN 3-85031-083-3